Präsentation der Monographie

“Geometry of Locally Finite Spaces”

Kurzfassung

Das Thema der Monographie [Kov2008] ist die axiomatische Theorie der lokal-endlichen topologischen Räume, sowie die auf ihr basierende Digitalgeometrie und ihre Anwendungen in der Bildanalyse. Lokal-endliche Räume haben den Vorteil im Vergleich zu klassischen stetigen Räumen, dass sie im Computer modelliert und explizit dargestellt werden können. Im Buch wird ein neuer Satz der Axiome der Topologie vorgestellt. Grundlegende topologische Begriffe werden von den Axiomen hergeleitet und Eigenschaften der lokal-endlichen Räume untersucht. Das Buch enthält 32 Theoreme mit Beweisen. Diese Theorie baut eine Brücke zwischen der Topologie und der Computerwissenschaft, wobei die Theorie in voller Übereinstimmung mit der klassischen Topologie ist. Außer den theoretischen Grundlagen werden im Buch zahlreiche effiziente Algorithmen zur Lösung topologischer und geometrischer Probleme beschrieben. Die meisten Algorithmen werden von einem Pseudo-Code begleitet, was ihre praktische Anwendung erleichtert. Außerdem wird ein neuer Zugang zur Digitalgeometrie präsentiert, der *ausschließlich* auf der Theorie der lokal-endlichen Räumen basiert. Er ist also unabhängig von der euklidischen Geometrie. Das ist ein wichtiger Beitrag zur Grundlagenforschung und führt außerdem zu vielen neuen Lösungen angewandter Probleme. Diese Lösungen, die entsprechenden Algorithmen und die erzielten Ergebnisse werden in den Kapiteln 10-13 beschrieben. In der Monographie fasst der Autor die im Laufe seiner mehr als zwanzigjährigen Forschung auf diesem Gebiet gewonnenen Erkenntnisse zusammen. Die Monographie ermöglicht die Anwendung dieser Erkenntnisse für die Computerwissenschaft, insbesondere für die allseitig nutzbare Bildanalyse in der Medizin und Technik.

1 Einleitung

Die Monographie fast die Ergebnisse der mehrjährigen Forschung des Autors auf den Gebieten der Digitaltopologie und Digitalgeometrie zusammen. Sie ist der Theorie der lokal-endlichen Räume und deren Anwendungen gewidmet. Ein lokal-endlicher Raum ist ein topologischer Raum, dessen jedes Element eine Umgebung aus endlich vielen Elementen besitzt. Solche Räume, zum Gegenteil der klassischen stetigen Räumen, können im Computer explizit dargestellt werden. Das Buch präsentiert einen axiomatischen Zugang zur Topologie und Geometrie der lokal-endlichen Räume mit Anwendungen zur grafischen Datenverarbeitung und zu anderen Bereichen der Forschung.

Das Buch umfasst 332 Seiten mit 120 Abbildungen, darunter 12 Farbtafeln, und 85 Literaturverweise. Es enthält 32 Theoreme mit Beweisen und zahlreiche Algorithmen, von denen die meisten von einem Pseudo-Code begleitet werden, der auf der Programmiersprache C++ basiert.

Nachfolgend wird der Inhalt der wichtigsten Kapitel des Buches vorgestellt. Abschnitte 2 bis 7 dieser Präsentation sind theoretischen Problemen gewidmet. Abschnitte 8 bis 10 beschreiben die Algorithmen und Anwendungen. Der Abschnitt 11 verweist auf diskussionswürdige Themen.

2 Lokal-endliche topologische Räume

Lokal-endliche Räume dienen der Überwindung der in Geometrie und Analysis existierenden Diskrepanz zwischen Theorie und Anwendungen: Der traditionelle Weg der Forschung besteht darin, dass man die Theorie im euklidischen Raum entwickelt, wobei die Anwendungen nur mit endlichen diskreten Mengen zu tun haben. Der Grund für das Letztere ist, dass nicht einmal eine kleine Teilmenge des euklidischen Raumes im Computer explizit dargestellt werden kann, weil solch eine Teilmenge, egal wie klein sie ist, unendlich viele Elemente besitzen muss.

Lokal-endliche Räume sind einerseits theoretisch konsistent und mit der klassischen Topologie konform und, andererseits, explizit darstellbar im Computer.

3 Ziele der Monographie

Der Autor möchte zeigen, dass es möglich ist, eine lokal-endliche Topologie zu entwickeln, die für Anwendungen auf dem Gebiet der grafischen Datenverarbeitung gut geeignet und vom euklidischen Raum unabhängig ist. Sein zweites Ziel ist es, Empfehlungen für die Entwicklung effizienter Algorithmen basierend auf der Topologie und Geometrie lokal-endlicher Räume, insbesondere der abstrakten Zellenkomplexe, zu vermitteln. Zahlreiche Algorithmen dieser Art sind in der Monographie beschrieben.

Die wichtigsten Themen der Monographie sind:
- Axiomatisches Herangehen an Digitaltopologie;
- Abstrakte Zellenkomplexe – ein wichtiger Spezialfall eines lokal-endlichen Raums;
- Stetige Abbildungen zwischen lokal-endlichen Räumen;
- Digitale Strecken und Ebenen;
- Theorie der Oberflächen im dreidimensionalen Raum;
- Datenstrukturen;
- Ein universeller Algorithmus zur Verfolgung von Begrenzungen in *n*D-Räumen;
- Markierung von Zusammenhangskomponenten;
- Verfolgung, Codierung und Rekonstruktion von Oberflächen im 3D-Raum;
- Themen zur Diskussion – irrationale Zahlen; optimale Schätzung von Ableitungen;
- Zu lösende Probleme.

4 Neue Axiome

Weshalb wurde ein neuer Satz von Axiomen vorgeschlagen?

Das Verhältnis der Axiome der klassischen Topologie zu den Anforderungen der grafischen Datenverarbeitung mit dem Computer ist für Nicht-Topologen unklar. Es ist z.B. nicht klar, wozu man den Begriff der offenen Mengen benötigt, die den klassischen Axiomen genügen.

Die neuen Axiome basieren auf den Begriffen des Zusammenhangs und der Begrenzung einer Teilmenge. Diese Begriffe sind für die Anwendungen, insbesondere für die Bildanalyse, wichtig.

Der Autor hat bewiesen, dass klassische Axiome als Theoreme aus den neuen Axiomen hergeleitet werden können. Auf diese Weise bekommen die klassischen Axiome eine Beziehung zu den gewünschten Eigenschaften des Zusammenhangs und der Begrenzung.

Axiom 1: Für jedes Element e des Raumes S existieren bestimmte Teilmengen, die e enthalten, welche Umgebungen von e genannt werden. Der Durchschnitt zweier Umgebungen von e ist wieder eine Umgebung von e. Jedes Element e hat seine kleinste Umgebung SN(e).

Axiom 2: Einige Elemente des Raumes haben in ihren kleinsten Umgebungen SN mehr als ein Element.

Axiom 3: Die Begrenzung Fr(T, S) einer jeden Teilmenge $T \subset S$ ist dünn.

Der Begriff einer dünnen Begrenzung ist im Buch genau definiert. Abb. 1a und 1b erklären diesen Begriff. In Abb. 1a sind die Raumelemente als Quadrate mit der bekannte 4-Nachbarschaft dargestellt. Die Begrenzung der Menge der grauen Quadrate ist durch kleine schwarze und weiße Kreise markiert; sie ist dick. Raumelemente in Abb. 1b sind Quadrate, kurze

Strecken und Punkte. Die Begrenzung der grau gefüllten Menge besteht aus fett gedruckten Strecken, sowohl durchgezogenen als auch gepunkteten, und aus Punkten, die mit schwarzen und weißen Kreisen markiert sind. Diese Begrenzung ist dünn.

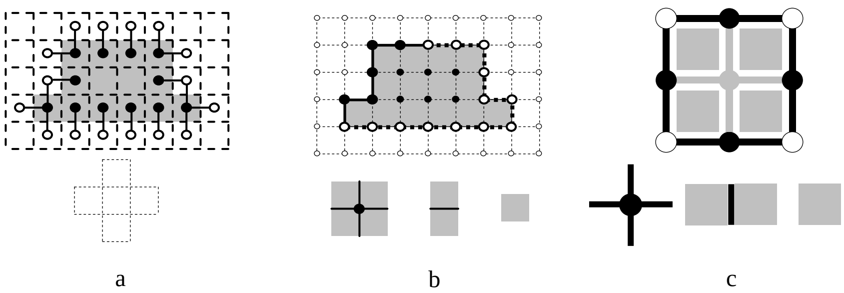

Abb. 1 Beispiele von Begrenzungen:
Eine dicke Begrenzung (a); eine dünne Begrenzung (b); Begrenzung mit Lücken (c)

Axiom 4: Die Begrenzung der Begrenzung Fr(T, S) ist identisch mit Fr(T, S), das heißt Fr(Fr(T, S), S)=Fr(T, S).

Abb. 1c zeigt ein Beispiel einer Begrenzung, welche dem Axiom 4 nicht genügt. Eine wichtige Eigenschaft einer Begrenzung besteht darin, dass sie keine Lücken enthalten soll. Diese Bedingung verlangt mehr, als nur den Zusammenhang. Genauer gesagt, sie bedeutet, dass die Begrenzung der Begrenzung F einer Teilmenge des Raumes mit der Begrenzung F identisch ist. Zum Beispiel, die Begrenzung in Abb. 1c hat Lücken, die als weiße Kreise dargestellt sind. Man möchte dies erklären: Abb. 1c zeigt einen Raum S, der aus Quadraten, Strecken und Punkten besteht. Die Umgebungsrelation ist in diesem Beispiel nicht transitiv: Die kleinste Umgebung SN(P) eines Punktes P enthält einige Strecken, die mit P inzident sind, aber keine Quadrate. Die kleinste Umgebung SN einer Strecke enthält einen und zwei mit ihr inzidente Quadrate. Die SN eines Quadrats ist das Quadrat selbst. Die zu betrachtende Teilmenge T ist durch graue Elemente dargestellt. Ihre Begrenzung Fr(T, S) besteht aus schwarzen Strecken und schwarzen Punkten (Kreise), weil diese Elemente nicht zu T gehören, wobei ihre SNs die Teilmenge T schneiden. Die weißen Punkte gehören nicht zu F=Fr(T, S), weil ihre SNs die Teilmenge T nicht schneiden. Das sind die Lücken. Aber die Menge Fr(F, S) enthält die weißen Punkte, weil ihre SNs sowohl die Menge F als auch ihr Komplement schneiden (an den Punkten selbst). Also in diesem Beispiel ist die Begrenzung Fr(F, S) mit F=Fr(T, S) nicht identisch.

5 Eigenschaften der ALF-Räume

Wir bezeichnen einen lokal-endlichen Raum (locally finite space), der unseren Axiomen genügt, als einen ALF-Raum. Im Abschnitt 2.3 des Buches ist bewiesen, dass klassische Axiome als Theoreme von unseren Axiomen hergeleitet werden können und das ein ALF-Raum ein Spezialfall eines klassischen T_0-Raumes, aber nicht eines T_1-Raumes ist.

Ein abstrakter Zellenkomplex (AC-Komplex genannt) ist ein Spezialfall eines ALF-Raumes, der durch eine zusätzliche Eigenschaft charakterisiert ist, nämlich durch die Dimensionsfunktion $dim(a)$, die jedem Raumelement eine nichtnegative ganze Zahl zuweist, so dass aus $b \in$SN(a), stets $dim(a) \leq dim(b)$ folgt. Elemente eines AC-Komplexes werden *Zellen* genannt.

Es wird die bekannte Definition eines abstrakten Zellenkomplexes nach Steinitz [Stein08] benutzt:

Definition AC: Ein *abstrakter Zellenkomplex* (AC-Komplex) C=(E, B, dim) ist eine Menge E von abstrakten Elementen (Zellen) versehen mit einer asymmetrischen, irreflexiven und transitiven binären Relation $B \subset E \times E$, *Berandungsrelation* genannt, und mit einer Dimensionsfunktion dim: $E \rightarrow I$ von E in die Menge I der nichtnegativen ganzen Zahlen, wobei $dim(e') < dim(e'')$ für alle Paare $(e', e'') \in B$ gilt.

Eine Zelle ist niemals eine Teilmenge einer anderen Zelle. Es ist üblich im Falle $(e',e'') \in B$ die Bezeichnung $e'<e''$ zu benutzen.

Die obige Definition wird durch eine topologische Definition der Dimensionen der Raumelemente ergänzt. Dimensionen der Zellen repräsentieren die partielle Ordnung (Halbordnung) die der Berandungsrelation entspricht. Man nenne die Folge $a<b< ... <k$ von Zellen eines Komplexes C, in der jede Zelle die nächste berandet, einen *Berandungsweg* von a nach k in C. Die Anzahl der Zellen in der Folge *minus eins* heißt *Länge* des Berandungswegs.

Definition DC (Dimension einer Zelle): Die Dimension $dim(c, C)$ der Zelle c eines Komplexes C ist die Länge des *längsten Berandungswegs* vom irgendeinen Element von C nach c.

Diese Definition stimmt mit dem bekannten Begriff der topologischen Dimension oder Höhe eines Elements einer partiell geordneten Menge [Birk61] überein.

Laut Definition DC wird die Dimension einer Zelle c *relativ* zu einem bestimmten Teilkomplex, dem die Zelle c angehört, definiert, weil die Länge des längsten Berandungswegs in verschiedenen Teilkomplexen unterschiedlich sein kann.

Ein Beispiel zur Berechnung der Dimension von Zellen ist in Abb. 2 gezeigt. Die Zelle v hat Dimension 3, weil die Länge des Wegs $p<e<f<v$ gleich 3 ist.

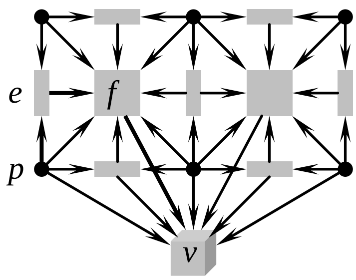

Abb. 2 Ein Komplex, in dem die Berandungsrelation durch Pfeile gezeigt wird.
Ein Pfeil zeigt von *a* nach *b*, wenn *a* berandet *b*

Dimension der Raumelemente ist eine wichtige Eigenschaft. Die Benutzung der Dimensionen schützt vor Fehlern, die bei einer Benutzung von lokal-endlichen Räumen ohne Dimensionen entstehen können. Ein Beispiel eines typischen Fehlers wird im Buch gezeigt.

Wir haben den Begriff eines n-dimensionalen kartesischen Komplexes als das kartesische Produkt von n eindimensionalen Komplexen [Kov86] eingeführt. Dadurch entstand die Möglichkeit, den Zellen Koordinaten zuzuordnen. Wir nennen sie *kombinatorische Koordinaten*.

Abb. 3 zeigt die Abschlüsse und die kleinsten Umgebungen (SONs) der Zellen von kartesischen Komplexen verschiedener Dimensionen.

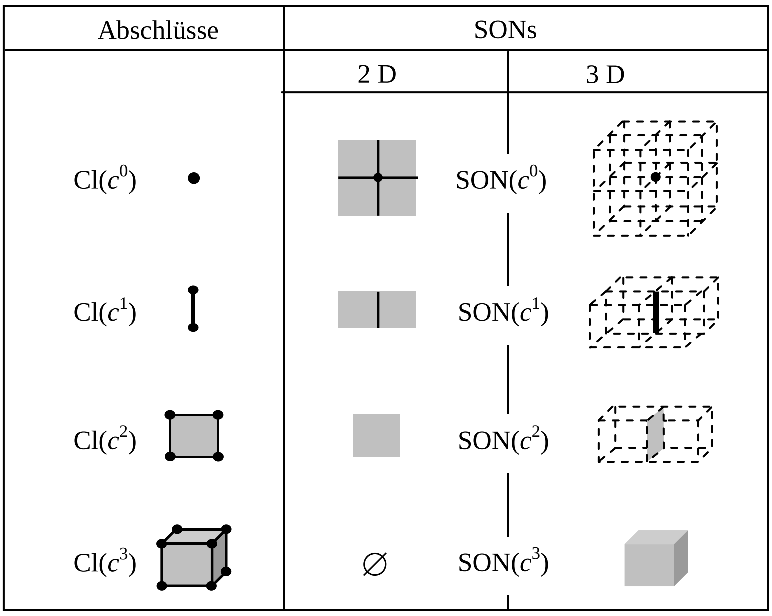

Abb. 3 Abschlüsse und SONs von Zellen von kartesischen AC Komplexen

6 Kombinatorischer Homöomorphismus, Kugeln und Sphären

Der Begriff des Homöomorphismus von zwei Mengen ist ein grundlegender Begriff der Topologie. Zwei Mengen heißen homöomorph oder topologisch äquivalent, wenn es eine stetige Abbildung aus einer Menge in die andere gibt, wobei die inverse Abbildung auch stetig ist. Es gibt auch den anderen klassischen Weg, den Homöomorphismus zu definieren. Dieser ist auch unmittelbar auf Komplexe anwendbar und kann auf andere lokal-endliche Räume erweitert werden. Er heißt *kombinatorischer Homöomorphismus* und basiert auf dem Begriff der *elementaren Unterteilung* von Zellen [Stil95, S. 24]. Wir werden ihn auf Komplexe anwenden.

Der ursprüngliche Begriff eines abstrakten Zellenkomplexes ist zu allgemein: Es ist z.B. möglich einen „skurrilen“ (seltsamen) Komplex zu definieren, in dem eine eindimensionale Zelle (1-Zelle) durch mehr als zwei 0-Zellen berandet ist, oder mit einer 2-Zelle, die ein Loch enthält, oder mit einer 3-Zelle, die wie ein Torus aussieht. All das widerspricht der obigen Definition AC nicht. Um solche Situationen zu vermeiden, wurden in der klassischen Topologie die elementaren Unterteilungen auf der Basis der Topologie des euklidischen Raumes und der euklidischen Komplexe eingeführt (siehe z.B. die moderne Übersicht in [Stil95]).

Unser Ziel ist es, eine Theorie zu entwickeln, die vom euklidischen Raum unabhängig ist. Deswegen wurden neue Definitionen formuliert, die ausschließlich auf der Topologie der AC Komplexe basieren. Es ist zu vermuten, dass der Begriff des kombinatorischer Homöomorphismus nicht auf jeden beliebigen Komplex anwendbar ist. Es muss eine Einschränkung sein, die „skurrile“ Komplexe ausschließt. Diese Einschränkung soll von derselben Natur wie die klassische Einschränkung sein, welche euklidische Zellen als konvexe Mengen definiert.

Ein möglicher Weg wäre, eine Klasse von Komplexen einzuführen, die den kartesischen Komplexen im bestimmten Sinne ähnlich sind, weil kartesische Komplexe die gewünschten

Eigenschaften haben: Eine 1-Zelle ist von höchstens zwei 0-Zellen berandet; eine 2-Zelle hat keine Löcher; eine 3-Zelle ist eine dreidimensionale toplogische Kugel usw. Aber man sieht keine Möglichkeit, eine Klasse von Komplexen zu definieren, die den kartesischen Komplexen homöomorph sind, bevor man die Begriffe einer topologischen Kugel und einer Sphäre definiert hat, weil diese Begriffe für die elementaren Unterteilungen benötigt werden. Es wird angestrebt, topologische Begriffe *vor und unabhängig von* den geometrischen zu definieren. Diese Herangehensweise basiert auf dem Glauben, dass Geometrie erst dann konsistent aufgebaut werden kann, wenn alle notwendigen topologischen Begriffe bereits definiert sind. Topologie soll die Basis der Geometrie und nicht umgekehrt sein. Aus diesem Grunde werden keine Begriffe wie Metrik oder euklidische Koordinaten in topologischen Definitionen verwendet. Folglich kann der klassische Begriff der topologischen Kugel nicht benutzt werden: Er ist doch als die Menge der Punkte mit einem begrenzten Abstand vom Mittelpunkt definiert.

Die Begriffe der topologischen Kugel und der Sphäre wurden an Komplexe angepasst indem Begriffe der *kombinatorischen Kugel und Sphäre* eingeführt wurden. Um die Benutzung der „skurrilen“ Komplexe zu vermeiden, wurden die Begriffe einer *echten Zelle* und eines *echten Komplexes* definiert. Die Ersten kann man als Ersetzung der konvexen Zellen der euklidischen Komplexe betrachten.

Der Begriff einer echten Zelle hat zu den neuen Definitionen der kombinatorischen Kugel und der Sphäre geführt, die von Geometrie und Metrik unabhängig sind. Abb. 4 soll der Anschauung dieser Begriffe dienen.

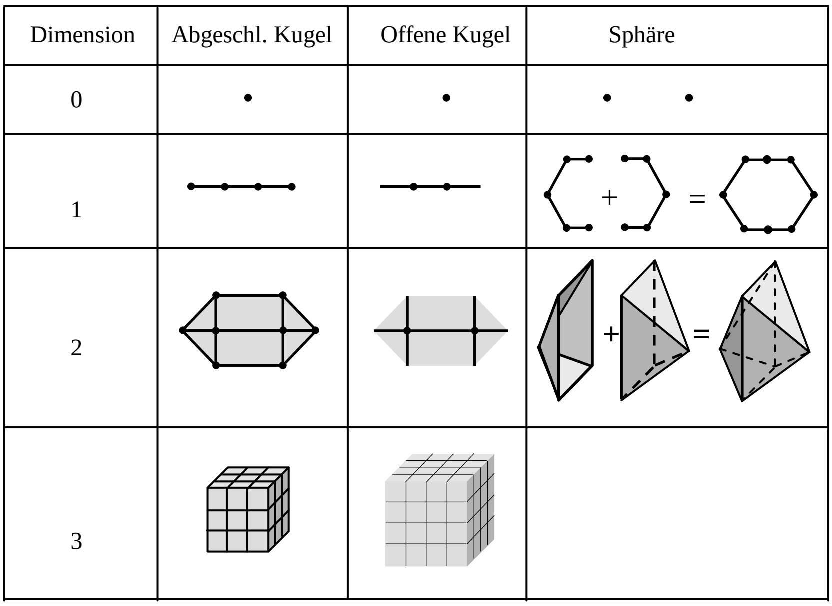

Abb. 4 Beispiele von AC-Kugeln und Sphären der Dimensionen von 0 bis 3

Die rein topologischen Definitionen der kombinatorischen Kugel und Sphäre unabhängig vom euklidischen Raum haben es ermöglicht, den bekannten Begriff des kombinatorischen Homöomorphismus für lokal-endliche Räume anzuwenden. Er basiert auf den elementaren Unterteilungen von Zellen.

Abb. 5 zeigt ein Beispiel der elementaren Unterteilung einer zweidimensionalen Zelle,

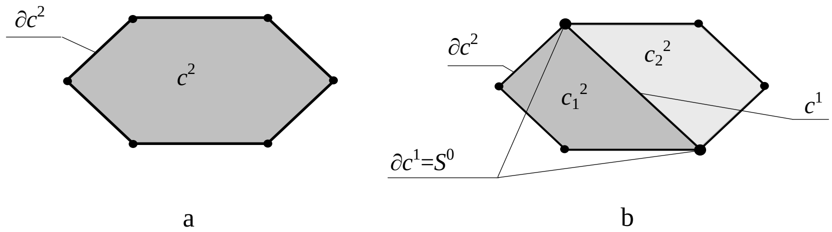

Abb. 5 Beispiel der elementaren Unterteilung einer 2-Zelle; die Originalzelle (a) und ihre Unterteilung (b)

Genaue Definitionen und Beweise sind im Buch zu finden.

Abb. 6 illustriert den kombinatorischen Homöomorphismus eines Quadrats und eines Dreiecks.

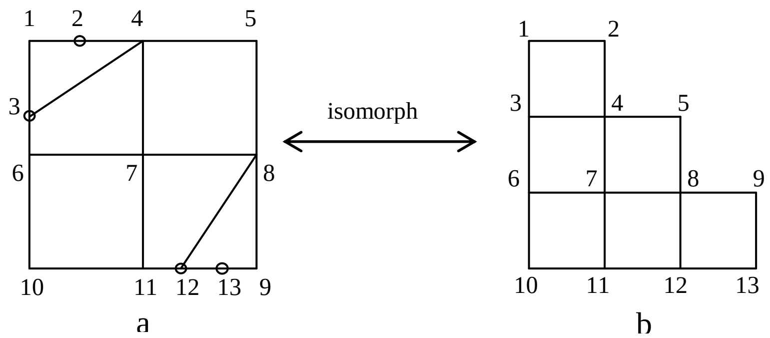

Abb. 6 Unterteilung eines digitalisierten Quadrats (a), die der Unterteilung des digitalisierten Drecks (b) isomorph ist. Kreise zeigen die neuen Punkte, die bei der Unterteilung eingeführt wurden

Es wurden auch die Begriffe der Begrenzung und des Randes verallgemeinert, indem die Begriffe einer öffnenden Begrenzung, eines öffnenden Randes und des verallgemeinerten Randes eingeführt wurden. So z.B. eine punktierte Sphäre (eine Sphäre ohne einen Punkt) ist laut der neuen Definitionen eine Mannigfaltigkeit mit einem öffnenden Rand, wobei sie vom klassischen Standpunkt her überhaupt keine Mannigfaltigkeit ist.

7 Stetige Funktionen und Zusammenhang erhaltende Abbildungen (CPMs)

In der klassischen Topologie wird der Homöomorphismus durch stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen definiert. Die Möglichkeit, diese Idee auf lokal-endliche Räume anzuwenden, ist stark begrenzt: Im Abschnitt 4.2 des Buches wurde bewiesen, dass Isomorphismus der *einzige mögliche klassische Homöomorphismus* zwischen lokal-endlichen Räumen (LER) ist.

Es wurde auch bewiesen, dass es unmöglich ist, einen LER auf einen „größeren" LER, d.h. auf einen Raum, der mehr Elemente enthält, mit klassischen Mitteln stetig abzubilden. Der Autor hat vorgeschlagen, allgemeinere Korrespondenzen zwischen den Räumen X und Y zu betrachten, welche eine einzige Zelle von X auf eine Teilmenge von Y abbilden [Kov93, Kov94]. Solch eine Korrespondenz heißt *Zusammenhang erhaltend*, wenn jede zusammenhängende Teilmenge von X auf eine zusammenhängende Teilmenge von Y abgebildet wird. Sie wird als CPM (connectivity preserving map) bezeichnet. In Übereinstimmung mit der klassischen Definition der Stetigkeit ist eine CPM stetig, wenn das Urbild jeder offenen Teilmenge offen ist.

Man betrachte die CPM F: $X \rightarrow Y$, wobei X und Y Komplexe sind, den Teilkomplex $F(x)$, der das Bild von $x \in X$ ist, und den Teilkomplex $F^{-1}(y)$, der das Urbild von $y \in Y$ ist. Man bezeichne mit $V(x, y)$ die Zusammenhangskomponente von $F(x)$, die y enthält, und mit $H(x, y)$ die Komponente von $F^{-1}(y)$, die x enthält. Die Korrespondenz F heißt *einfach*, wenn für jedes Paar $(x, y) \in F$ höchstens eine der Mengen $V(x, y)$ and $H(x, y)$ mehr als ein Element enthält.

Abb. 7 zeigt Beispiele von CPMs.

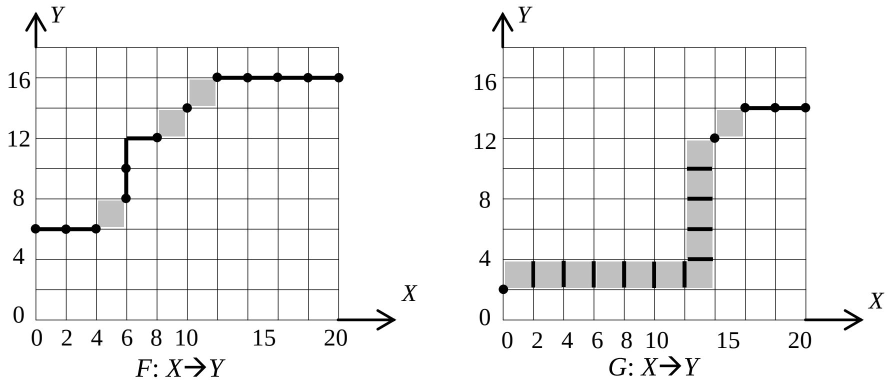

Abb. 7 Beispiele von Korrespondenzen: F ist eine stetige und einfache CPM; G ist stetig, aber nicht einfach

Es wurde im Buch bewiesen, dass der kombinatorische Homöomorphismus laut der Definition CH (Abschnitt 3.6, S. 57) eine stetige CPM F: $X \rightarrow Y$ eindeutig definiert, wobei die inverse Korrespondenz auch eine stetige CPM ist.

8 Digitalgeometrie. Digitale Strecken und Ebenen

Kapitel 6 und 7 des Buches enthalten Definitionen von digitalen Strecken und Ebenen. Diese Definitionen sind zum Unterschied von allen, dem Autor bekannten Definitionen, von den entsprechenden euklidischen Begriffen unabhängig. Dies bedeutet, das eine digitale Strecke *nicht* als das Ergebnis der Digitalisierung einer euklidischen Strecke definiert wird. Wir definieren zuerst eine digitale Halbebene als einen kartesischen Teilkomplex, wobei kombinatorische Koordinaten aller seiner Elemente einer linearen Ungleichung genügen. Eine digitale Strecke (DSS) ist dann eine zusammenhängende Teilmenge der Begrenzung der Halbebene.

Man soll zwischen zwei Typen von digitalen Kurven in einem zweidimensionalen Raum unterscheiden: Sichtkurven sind Folgen von Pixeln (2-Zellen) und sind für Darstellungen von Kurven in Bildern geeignet; Begrenzungskurven dagegen sind Folgen von abwechselnden 0- und 1-Zellen und sind für die Bildanalyse besser als die Sichtkurven geeignet. Wir betrachten hauptsächlich Begrenzungskurven.

Kapitel 7 des Buches enthält eine vollständige Theorie der digitalen Strecken (DSS wie digital straight segments), die als Begrenzungskurven betrachtet werden. Gleichungen, die solche DSSs definieren, und ein Algorithmus zur Erkennung einer DSS haben eine Ähnlichkeit mit den bekannten Gleichungen und Algorithmen, aber sie haben auch wichtige Unterschiede.

Ein schneller Algorithmus zur Unterteilung einer digitalen Begrenzungskurve in möglichst lange DSSs ist in diesem Kapitel beschrieben. Eine Methode der sparsamen und verlustfreien Codierung von Folgen der DSSs ist im Abschnitt 7.2.5 beschrieben. „Verlustfrei“ bedeutet, dass ein segmentiertes digitales Bild aus dem Code der Begrenzungen der Segmente genau wiederhergestellt werden kann.

Der Abschnitt 7.3 enthält die Theorie der digitalen Ebenen. Diese werden, ähnlich wie die DSSs, als Begrenzungen von Halbräumen betrachtet. Sie bestehen nicht aus Voxeln, sondern aus Zellen der Dimensionen 0 bis 2.

Kapitel 9 enthält eine Theorie der Oberflächen im dreidimensionalen Raum; Kapitel 9 – eine Theorie der digitalen Kreisbögen.

9 Anwendungen der DSSs

1. Schätzung des Umfangs einer Teilmenge im zweidimensionalen Raum.
2. Darstellung von Objekten in Bildern als Polygone mit dem Zweck der Formanalyse.
3. Sparsame und genau Codierung von Bildern.

Im Folgenden wird die letztere Anwendung erläutert. Es gibt mehrere verschiedenen DSSs, die durch zwei gegebene Punkte gehen. Um diese DSSs zu unterscheiden, müssen drei zusätzliche Parameter *L, M, N* angegeben werden: *M/N* ist der Anstieg der Basis der DSS, *L* ist der Wert der linken Seite der Gleichung $H(x, y)$=0 der Basis am Anfangspunkt der DSS. Die DSS kann *genau wiederhergestellt werden* aus den Koordinaten ihrer Endpunkte und den genannten zusätzlichen Parametern. Es ist möglich, eine Folge von DSSs mit diesen Daten sparsam zu codieren, wobei im Durchschnitt nur 2,3 Bytes Speicherplatz pro DSS benötigt werden. Abb. 8 zeigt ein Bespiel einer sparsamen Codierung eines Bildes durch DSS-Polygone und einer schnellen Erkennung aller kreisförmigen teilweise beschädigten Objekte.

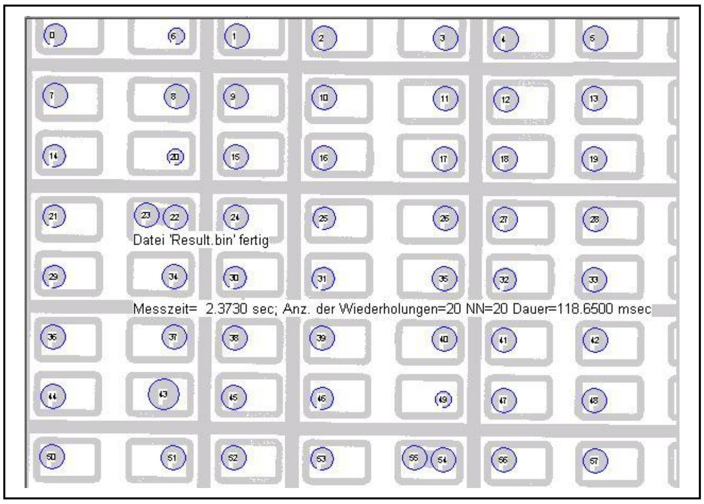

Abb. 8 Beispiel eines Bildes eines Waters mit Erkennung kreisförmiger Objekte

Das in Abb. 8 gezeigte Binärbild aus 832×654 Pixeln wurde durch DSSs codiert. Alle teilweise beschädigten kreisförmigen Objekte wurden richtig erkannt. Die gesamte Bearbeitungszeit einschließlich der Codierung des Bildes und der Erkennung von 57 Objekten betrug 20 ms auf einem PC mit einem Pentium-Processor von700 MHz.

10 Andere Anwendungen und Algorithmen

Das Kapitel 11 des Buches beginnt mit Empfehlungen für Entwickler von Algorithmen. Es wird empfohlen, die üblichen Nachbarschaftsrelationen (die 4- und 8-Nachbarschaft im 2D-Fall und die 6-, 18- und 26-Nachbarschaft im 3D-Fall) nicht zu benutzen, sondern alle topologischen und geometrischen Probleme vom Standpunkt der lokal-endlichen topologischen Räume (ALF-Räume) oder, noch besser, der AC-Komplexe zu betrachten. Komplexe haben einen Vorteil im Vergleich zu anderen ALF-Räumen durch das Vorhandensein von Dimensionen der Zellen. Dimensionen machen die Arbeit mit einem topologischen Raum einfacher und anschaulicher. Sie helfen auch, Widersprüche zu vermeiden. Der Abschnitt 11.1 enthält konkrete Empfehlungen zur Nutzung der AC-Komplexe bei der Entwicklung von Algorithmen für die grafische Datenverarbeitung.

Der Abschnitt 11.2 enthält Beschreibungen von verschiedenen Algorithmen für die Verfolgung und Codierung von Begrenzungen in 2D Bildern und in 2D Unterräumen eines *n*-dimensionalen Raumes. Darunter ist ein *universeller* Algorithmus zur Verfolgung von Begrenzungen von 2D Schichten in *n*D Bildern; *n*=2, 3, 4. Dieser Algorithmus kann *ohne jegliche Veränderung* in Räumen beliebiger Dimension benutzt werden. Er wurde erfolgreich getestet in Räumen der Dimensionen bis 4. Im 3D Raum wurde er zur Verfolgung und Codierung von Oberflächen eingesetzt.

Der Abschnitt 11.2.6.2 enthält den Algorithmus für eine *automatische* Erzeugung der Blockzellenliste eines segmentierten Farbbildes. Die Blockzellenliste ist eine vom Autor entwickelte Datenstruktur [Kov89]. Sie ermöglicht eine sparsame und verlustfreie Codierung von Bildern und ist für die Bildanalyse gut geeignet, weil sie die vollständige topologische und geometrische Information über das Bild enthält. Relationen zwischen den Teilmengen des Bildes wie Inzidenz, Nachbarschaft, Einschließung usw. können ohne Suchen aus der Liste entnommen werden. Im Buch sind Beispiele von Farbbildern abgebildet, die aus der Blockzellenliste fehlerfrei wiederhergestellt wurden.

Abschnitte von 11.3 bis 11.7 des Buches enthalten Beschreibungen von folgenden Algorithmen:

1) Verlustfreie Codierung von Folgen von Digitalstrecken mit zusätzlichen Parametern;
2) Genaue Wiederherstellung von *n*-dimensionalen Bildern aus dem Code der Begrenzungen; *n*=2, 3, 4;
3) Schnelle Markierung von Zusammenhangskomponenten, zwei verschiedene Algorithmen;
4) Parallele Berechnung von Skeletten von Teilmengen in 2D;
5) Algorithmen für topologische Untersuchungen.

Kapitel 12 beschreibt eine Methode zur Erzeugung von konvexen Hüllen im 3D Raum.

Kapitel 13 ist der Verfolgung und Codierung von Oberflächen im 3D Raum gewidmet. Es enthält Beschreibungen von folgenden Algorithmen:

a) Die einfachste Codierung einer Oberfläche durch die Tiefensuche.
b) Verlustfreie Codierung einer Oberfläche durch einen Eulerkreis im Nachbarschafts-graphen der Facetten (2-Zellen);
c) Spiralförmige Verfolgung einer Oberfläche, welche neben dem Code eine Henkel-zerlegung der Oberfläche automatisch erzeugt;
d) Die sparsamste Codierung von Oberflächen mit dem „Reifencode“ mit weniger als 2 Bits pro Facette (2-Zelle).

Die meisten Algorithmen werden von einem Pseudocode begleitet, welcher auf der Programmiersprache C++ basiert.

11 Diskussionsthemen und zu lösende Probleme

Das letzte Kapitel 14 der Monographie ist den diskussionswürdigen Fragen gewidmet, wie über die Notwendigkeit und Möglichkeit, die Benutzung der irrationalen Zahlen zu vermeiden, und über die optimale Methode der Berechnung der Ableitungen von Funktionen, welche mit einer begrenzten Genauigkeit angegeben sind.

Es wurde gezeigt, dass es möglich ist, eine Theorie der Rechnung zu entwickeln, die keine reellen Zahlen und keinen euklidischen Raum benutzt. Die im Buch beschriebenen Algorithmen realisieren diese Möglichkeit und betrachten trotzdem topologische Begriffe des Zusammenhangs und der Begrenzung, welche in Übereinstimmung mit der klassischen Topologie sind.

Es ist aus folgenden Gründen wünschenswert, die reellen Zahlen zu meiden. Man bekommt auf dem theoretischen Wege bestimmte Ergebnisse für reelle Zahlen und für zahlreiche mathematische Begriffe, die auf den reellen Zahlen basieren. Es ist aber unmöglich, diese Ergebnisse *direkt* in die Praxis umzusetzen. Es existiert keine Arithmetik der reellen Zahlen. In der Tat, hat z. B. die reelle Zahl $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ keinen Namen. Im Falle der rationalen Zahlen hat das Ergebnis jeder arithmetischen Operation (außer Division durch Null) einen Namen, der wie „Zähler/Nenner" aussieht. Aber nur eine abzählbare Menge von reellen Zahlen wie $\sqrt{2}$, oder π, oder e haben Namen. Die Menge der reellen Zahlen ohne Namen ist also überabzählbar. Es kann aber keine Arithmetik der Zahlen ohne Namen geben. Wenn man die Rechnung durchführt, die dem Ausdruck $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ entspricht, dann werden die Summanden und die Summe durch annähernde rationale Zahlen ersetzt. Es ist nicht richtig zu behaupten, dass man eine reelle Zahl mit einem *beliebig kleinem Fehler* berechnen kann. Es ist z. B. unmöglich sie mit einem Fehler kleiner als 10^{-1000} zu berechnen, weil weder genug Zeit noch Speicherplatz vorhanden ist.

Der Ausweg besteht in der Benutzung eines lokal-endlichen Raumes als Zahlenachse und der weiter oben erwähnten CPMs (Zusammenhang erhaltender Abbildungen) anstelle von stetigen Funktionen, deren Anwendung auf die lokal-endlichen Räume stark eingeschränkt ist.

Im Kapitel 14 wird auch gezeigt, dass der klassische Begriff der Ableitung einer Funktion nicht für Abbildungen zwischen lokal-endlichen Räumen anwendbar ist. Die Definition der klassischen Ableitung basiert auf der Vermutung, dass man die Werte einer Funktion mit einer beliebig hohen Genauigkeit berechnen kann. Im Buch wird gezeigt, dass, wenn man im Computer die Werte der Ableitung mit dem bekannten Ausdruck

$$(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$$

annähert und dabei den Wert Δx immer kleiner macht, dann wird das Ergebnis zuerst ungenau und dann sogar ganz sinnlos, wenn der Wert Δx mit der Ungenauigkeit der Werte von $f(x)$ vergleichbar wird. Es existiert der optimale Wert von Δx, der von der genannten Ungenauigkeit und von den Werten der höheren Differenzen (Ableitungen) von of $f(x)$ abhängt. Der obige Ausdruck mit dem optimalen Wert von Δx soll anstelle der klassischen Ableitung benutzt werden, wobei die letztere als eine Näherung betrachtet werden kann, deren Genauigkeit desto höher ist, je höher die Genauigkeit der Funktionswerte und je niedriger die absoluten Werte der höheren Ableitungen sind.

Als eine Demonstration dieser Ideen enthält der Abschnitt 14.2 des Buches eine Herleitung der bekannten Taylor-Formel für endliche Differenzen.

In den meisten Kapiteln des Buches werden die Darlegungen durch Hinweise auf die noch zu lösende Probleme ergänzt..

13 Schlussfolgerung

Soweit bekannt ist, stellt die Monographie den ersten Versuch, eine axiomatische Theorie der lokal–endlichen Räume und eine Konzeption der Digitalgeometrie unabhängig von der Hausdorff-Topologie und euklidischen Geometrie zu entwickeln dar. Die Monographie zeigt außerdem Wege zur Anwendung der erhaltenen theoretischen Ergebnisse in der graphischen Datenverarbeitung, allgemein in der Informatik und in anderen Bereichen der Forschung.

In dieser Präsentation zitierte Literatur

[Birk61] G. Birkhoff: *Lattice Theory*. American Mathematical Society, 1961.

[Kov86] V. Kovalevsky: *On the topology of digital spaces*. Proceedings of the Seminar "Digital Image Processing", Technical University of Dresden, 1986, pp. 1-16.

[Kov89] V. Kovalevsky: *Finite Topology as Applied to Image Analysis.* Computer Vision, Graphics and Image Processing, v. 45, No.2, 1989, pp.141-161.

[Kov93] V. Kovalevsky: *Digital Geometry based on the Topology of Abstract Cell Complexes*. In: Proceedings of the Third International Colloquium "Discrete Geometry for Computer Imagery". University of Strasbourg, 1993, pp. 259-284.

[Kov94] V. Kovalevsky: *A New Concept for Digital Geometry*. In *Shape in Picture*, Springer, 1994, pp. 37-51.

[Kov2008] V. Kovalevsky, *Geometry of Locally Finite Spaces*, Publishing House Dr. Baerbel Kovalevski, Berlin, 2008 (www.kovalevsky.de).

[Stein08] E. Steinitz: *Beiträge zur Analysis*, Sitzungsbericht Berliner Mathematischer Gesellschaft, v. 7, 1908, pp. 29-49.

[Stil95] J. Stillwell: *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer, 1995.